Speciální teorie relativity

7.1 Kosmonaut v kosmické lodi, přibližující se stálou rychlostí 0,5*c* k Zemi, vyšle směrem k Zemi světelný signál. Jak velká je rychlost signálu a) vzhledem k Zemi, b) vzhledem ke kosmické lodi?

7.2 Kosmická loď se pohybuje vzhledem k inerciální vztažné soustavě S stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$. V místě *A* vyšle loď světelný záblesk z bodového zdroje. Za určitou dobu je kosmická loď v místě *B* soustavy. Jaký tvar má v tomto okamžiku světelná vlnoplocha a v kterém místě je její střed a) pro pozorovatele, který je v klidu v místě *A*, b) pro pozorovatele, který je na kosmické lodi?

7.3 Soustava S′ se pohybuje vzhledem k inerciální vztažné soustavě S stálou rychlostí 0,5*c*. V soustavě S nastaly současně dvě události. Jsou tyto události současné také pro pozorovatele v soustavě S′?

7.4 Mezon se pohybuje rychlostí 0,8*c* vzhledem k pozorovateli. Jakou dobu života mezonu zjistí pozorovatel, je-li za klidu doba života mezonu $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ s?

7.5 Kosmická loď prolétá kolem sluneční soustavy rychlostí 0,98*c*. Na Zemi probíhá určitý děj po dobu půl hodiny. Jak dlouho trvá tento děj z hlediska soustavy spojené s kosmickou lodí?

7.6 Při laboratorních měřeních bylo zjištěno, že doba života elementární částice pohybující se rychlostí 0,95*c* je $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s. Jaká je doba života této částice v její klidové soustavě?

7.7 Osy dvou inerciálních vztažných soustav jsou rovnoběžné. Soustava S′ se pohybuje vzhledem k soustavě S rychlostí 0,6*c* ve směru osy *x*. V soustavě S je umístěna tyč o délce 8,0 m. Jakou délku této tyče změří pozorovatel v soustavě S′, je-li tyč a) rovnoběžná s osou *x*, b) rovnoběžná s osou *y*?

7.8 Kosmická loď o délce 100 m letí kolem Země a jeví se pozorovateli na Zemi zkrácena na 50 m. Jak velkou rychlostí loď letí?

7.9 Těleso tvaru krychle o hraně 4,5 m se pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí 0,8*c* ve směru rovnoběžném s jednou hranou krychle. Jaký je objem krychle a) v její klidové soustavě, b) v soustavě spojené se Zemí?

7.10 Inerciální vztažná soustava S′ se pohybuje vzhledem k soustavě S rychlostí $v = c/2$. V soustavě S′ se pohybuje částice rychlostí $u' = c/3$ tak, že vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u'}$ jsou rovnoběžné. Jaká je velikost rychlosti *u* částice vzhledem k soustavě S, mají-li vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u'}$ a) souhlasný směr, b) opačný směr?

7.11 Inerciální vztažná soustava S′ se pohybuje vzhledem k soustavě S stálou rychlostí $v = 0{,}50c$. V soustavě S′ se pohybuje částice rychlostí $u' = 0{,}40c$ tak, že vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u'}$ jsou rovnoběžné. Jaká je velikost *u* rychlosti částice vzhledem k soustavě S, mají-li vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u'}$ a) souhlasný směr, b) opačný směr?

7.12 Vypočtěte klidovou energii elektronu. Vyjádřete ji také v elektronvoltech.

7.13 Jakou hmotnost má elektron, pohybuje-li se rychlostí o velikosti 0,999 999 92*c*?

7.14 Těleso tvaru krychle o hraně 0,12 m má hmotnost 10,6 kg. Vypočtěte hustotu tělesa a) v soustavě, vzhledem k níž je těleso v klidu, b) v soustavě, vzhledem k níž se těleso pohybuje rychlostí 0,4c.

7.15 Částice o klidové hmotnosti m_0 se pohybuje rychlostí $v = 0{,}6c$. Vypočtěte hmotnost, hybnost, celkovou energii a kinetickou energii částice.

7.16 Jak velkou rychlostí se pohybuje částice, je-li její kinetická energie rovna její klidové energii?

7.17 Pohybující se částice má celkovou energii n-krát větší než energii klidovou. Vypočtěte rychlost částice. Řešte nejprve obecně a pak pro $n = 5$.

7.18 Vypočtěte rychlost částice, jejíž kinetická energie je 5 000krát menší než klidová energie.

7.19 Částice o klidové hmotnosti m_0 má celkovou energii $E = 5m_0c^2/3$. Vypočtěte relativistickou hybnost částice.

7.20 Částice o klidové hmotnosti m_0 má kinetickou energii $0{,}25m_0c^2$. Vypočtěte relativistickou hybnost částice.

řešení

R7.1 a) i b): Vzhledem k principu stálé rychlosti světla je v obou případech rychlost signálu rovna rychlosti světla *c*.

R7.2 a) koule se středem v místě *A*, b) koule se středem v místě *B*.

R7.3 Obecně ne. Jsou současné jen za podmínky, že jsou v soustavě S soumístné (nebo alespoň mají v této soustavě stejnou souřadnici *x*).

R7.4 $v = 0{,}8c$, $\tau_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ s; $\tau = ?$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 4{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

R7.5 $v = 0{,}98c$, $\Delta t_0 = 0{,}5$ h; $\Delta t = ?$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2{,}5\,\mathrm{h}$$

R7.6 $v = 0{,}95c$, $\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s; $\tau_0 = ?$

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 7{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$$

R7.7 $v = 0{,}6c$, $l_0 = 8{,}0$ m; $l = ?$

a) $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6{,}4\,\mathrm{m}$,

b) $l = l_0 = 8{,}0$ m; ve směru kolmém k ose *x* kontrakce délky nenastává.

R7.8 $l_0 = 100$ m, $l = 50$ m; $v = ?$

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{l^2}{l_0^2},$$

odtud $v = c\sqrt{1 - \frac{l^2}{l_0^2}} = 0{,}866c = 2{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

R7.9 $v = 0{,}8c$, $a = 4{,}5$ m; a) $V_0 = ?$, b) $V = ?$

a) $V_0 = a^3 = 91\,\mathrm{m^3}$

b) $V = a^2 \cdot a\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 55\,\mathrm{m^3}$

(Kontrakce délky nastává jen u té hrany krychle, která je rovnoběžná se směrem rychlosti krychle.)

R7.10 $v = c/2$, $u' = c/3$; $u = ?$

a) $u = \dfrac{v + u'}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}} = \dfrac{5}{7}c$

b) $u = \dfrac{v - u'}{1 - \dfrac{vu'}{c^2}} = \dfrac{1}{5}c$

R7.11 $v = 0{,}50c$, $u' = 0{,}40c$; $u = ?$

a) $u = \dfrac{v + u'}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}} = 0{,}75c$

b) $u = \dfrac{v - u'}{1 - \dfrac{vu'}{c^2}} = 0125c$

R7.12 $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $E_0 = ?$

$E_0 = m_0c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{14}$ J

1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

$E_0 = 5{,}1 \cdot 10^5$ eV = 0,51 MeV

R7.13 $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $v = 0{,}999\,999\,92c$; $m = ?$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2\,500 m_0 = 2{,}3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

R7.14 $a_0 = 0{,}12$ m, $m_0 = 10{,}6$ kg, $v = 0{,}4c$; a) $\rho_0 = ?$, b) $\rho = ?$

a) Hustota tělesa v jeho klidové soustavě je

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0}, \text{kde } V_0 = a_0^3, \text{tedy } \rho_0 = \frac{m_0}{a_0^3} = 6\,100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

b) Uvažujme nyní, jakou hustotu tělesa zjistí pozorovatel, vzhledem k němuž se těleso pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$. Pro jednoduchost předpokládejme, že se krychle pohybuje ve směru rovnoběžném s jednou její hranou. Délka hran kolmých ke směru rychlosti se nezmění, délky hran rovnoběžných se směrem pohybu se zkrátí na hodnotu

$$a = a_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Objem krychle je tedy $V = a_0^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Relativistická hmotnost krychle je $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Hustota krychle je $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m_0}{a_0^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \dfrac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 7\,300\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

R7.15 m_0, $v = 0{,}6c$; $m = ?$, $p = ?$, $E = ?$, $E_\mathrm{k} = ?$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}25m_0$$

$$p = mv = \frac{m_0 0{,}6c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0{,}75m_0c$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}25m_0c^2$$

$$E_\mathrm{k} = E - E_0 = 0{,}25m_0c^2$$

R7.16 $E_\mathrm{k} = E_0$; $v = ?$

$$E - E_0 = E_0,\quad E = 2E_0;\quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_2}}} = 2m_0c^2.$$

Odtud po úpravách dostaneme $\dfrac{v}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $v = 0{,}866c$.

R7.17 $E = nE_0$, $n = 5$; $v = ?$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = nm_0c^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = n^2,$$

odtud $\dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ a tedy $v = \dfrac{c}{n}\sqrt{n^2-1}$.

Pro $n = 5$ je rychlost $v = 0{,}98c$.

R7.18 $E_k = E_0/5\,000$; v = ?

$$E_k = E - E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_0 = \frac{E_0}{5\,000}$$

$$5\,000E_0 - 5\,000E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = E_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$5\,000 = (5\,000+1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{5\,000}{5\,001}$$

Po úpravách dostaneme

$v = c\sqrt{1-\frac{5\,000^2}{5\,001^2}}$ a odtud $v = 0{,}02c$.

R7.19 $E = 5m_0c^2/3$; p = ?

$$p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c^2}{E}$$

$$p = \frac{m_0v}{m_0c^2}E$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{m_0^2c^4}{E^2} = \frac{E^2-m_0^2c^4}{E^2} \Rightarrow v = \frac{c}{E}\sqrt{E^2-m_0^2c^4}$$

$$p = \frac{m_0v}{m_0c^2}E = \frac{m_0c\sqrt{E^2-m_0^2c^4}}{m_0c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{E^2-m_0^2c^4}$$

Dosadíme-li $E = \frac{5}{3}m_0c^2$, je $p = m_0c\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}m_0c$.

R7.20 $E_k = 0{,}25m_0c^2$; p = ?

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c^2}{E_k+m_0c^2}$$

Odtud:

$$v = c\frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}}{E_k + m_0 c^2}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0 c^2}$$

Po dosazení $E_k = 0{,}25 m_0 c^2$ je hybnost částice $p = 0{,}75 m_0 c$.